

In modo analogo, esseri puntiformi vincolati a muoversi in linea retta non potrebbero avere cognizione di una curvatura o di una superficie. Non potrebbero nemmeno superarsi l'un l'altro, perché per farlo dovrebbero uscire dal loro mondo lineare. Anche noi esseri umani, tridimensionali, non possiamo vedere un mondo a quattro o più dimensioni. Al limite possiamo immaginare la proiezione nel nostro spazio di enti quadridimensionali. Così come fece Salvador Dalì, percependo lo sviluppo tridimensionale di un ipercubo.

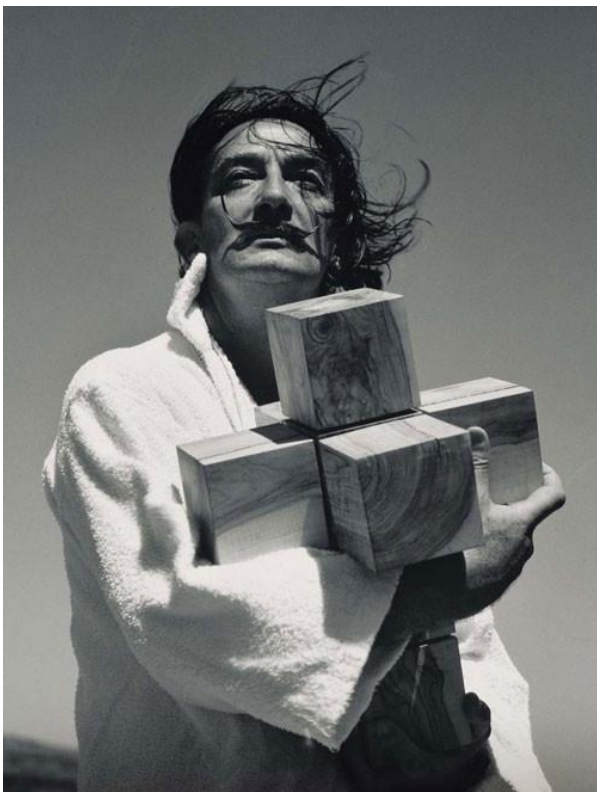


Figura 2: Salvador Dalí (1904-1989)

<https://www.alessandrocatania-zero.com/post/corpus-hypercubus-di-salvador-dali%C3%AC>

Nel dipinto *Corpus Hypercubus*, conservato al *Metropolitan Museum* di New York, il crocifisso è lo sviluppo nel nostro spazio di un cubo in dimensione quattro, dove Cristo appare sospeso, offrendoci un'evidente sensazione di trascendenza.



Figura 3: *Corpus Hypercubus*

<https://arte.icrewplay.com/corpus-hypercubus-crocifissione-dali/>

Il procedimento che possiamo seguire per realizzare la proiezione tridimensionale di un *tesseracto*, ovvero di un cubo di dimensione 4, è analogo a quello che applichiamo quando apriamo un cubo di carta per ottenere il suo sviluppo piano.

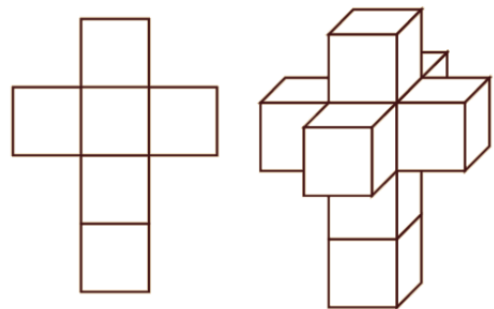


Figura 4: Sviluppo di un cubo e di un ipercubo

www.vialattea.net

Più complesso è immaginare una sfera in dimensione 4. Già con tre dimensioni non possiamo procedere ad uno sviluppo piano di questo solido. Un cubo può essere tagliato e appiattito, una sfera no. Una cosa che possiamo fare è quella di immaginare gli effetti di una sfera con 4 dimensioni nel nostro spazio, procedendo per analogia con quello che succede quando una sfera attraversa una superficie piana deformabile, come ad esempio una superficie liquida: crea degli anelli. Così possiamo pensare che nell'attraversare il nostro spazio, una sfera 4d produca una specie di ciambelle (il corrispondente termine matematico è *tori*) come quelle rappresentate in figura 5.

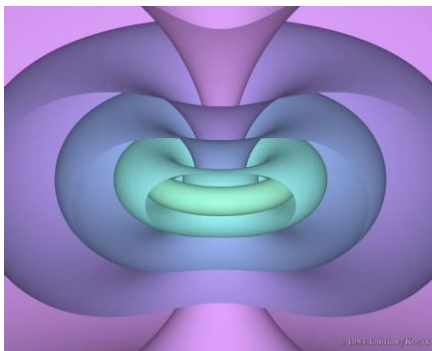


Figura 5: Laidlaw/Kocak Copyright 1981

Oppure possiamo fare riferimento alla proiezione stereografica, cioè quel procedimento che permette di individuare una corrispondenza tra i punti del piano e quelli della sfera, corrispondenza che è biunivoca solo se si esclude un punto (ad esempio il polo nord) della sfera (figura 6). E immaginare una sorta di proiezione stereografica di una sfera 4d nello spazio 3d.

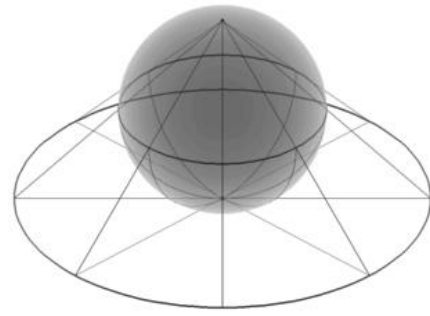


Figura 6: proiezione stereografica della sfera
wikipedia

La complicata corrispondenza tra una superficie sferica e una piana risulta evidente quando vogliamo rivestire con della carta una sfera. Mentre piegare un foglio attorno ad altre superfici rotonde, come un cilindro o un cono, è fattibile con una certa agilità, risulta complesso, anzi quasi impossibile, disporre il foglio attorno ad una sfera, in modo accurato. Ancora più complesso è il procedimento se ci imponiamo di sprecare meno carta possibile. Una richiesta non banale per chi deve rivestire sfere in produzioni industriali. Un caso in cui è fondamentale ottimizzare i risultati è il confezionamento dei cioccolatini di Salisburgo, i *Mozartkugeln*.



Figura 7: Mozartkugel

Fonte:

https://www.mozartkugel.at/produkte/sortiment/echte_salzburger_mozartkugeln

I produttori hanno scelto forme diverse per i foglietti dell'incartamento. La ditta *Mirabell* un rettangolo di lunghezza uguale alla misura della circonferenza massima, rettificata, del

cioccolatino, altre ditte un quadrato avente come diagonale la stessa circonferenza.

Basta un semplice calcolo per mostrare che questo rettangolo e questo quadrato hanno la stessa area. Infatti, detto R il raggio della sfera, il suo cerchio massimo ha lunghezza $2\pi R$. Poiché l'altra dimensione del rettangolo è πR , l'area del foglietto è $2\pi^2 R^2$. Per quanto riguarda il quadrato, di diagonale $2\pi R$, avremo un foglietto di lato $\sqrt{2}\pi R$, quindi con la stessa area del rettangolo: $2\pi^2 R^2$. Inizialmente è una scelta indifferente, quella di utilizzare pezzi di foglio rettangolare o quadrati, tuttavia si deve tener conto che la superficie sferica è $4\pi R^2$, quindi in entrambi i casi si spreca, per ciascun cioccolatino, una quantità di alluminio data da $2\pi^2 R^2 - 4\pi R^2$, ovvero, rispetto alla quantità iniziale $2\pi^2 R^2$, una frazione data da $(2\pi^2 R^2 - 4\pi R^2) / 2\pi^2 R^2$ che, semplificata, ci dà $(\pi - 2) / \pi$ che è circa 0.36, cioè il 36%. Per ogni cioccolatino, con questi incartamenti, si spreca il 36% di carta, una discreta percentuale di carta va persa.

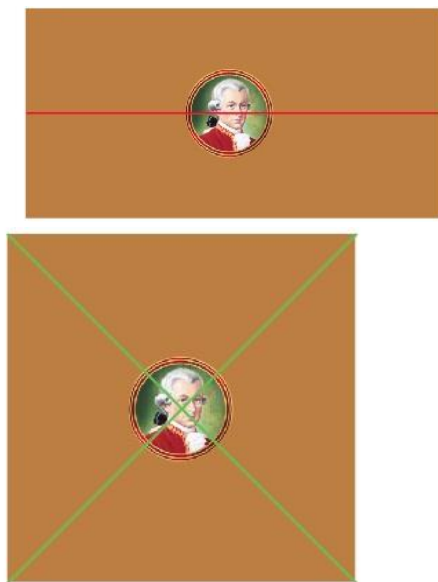


Figura 8: due differenti possibili incartamenti per i Mozartkugel

fonte:

http://www.qedcat.com/archive_cleaned/188.html

La matematica ha suggerito soluzioni che hanno reso minimo lo spreco di carta. Tra queste, alcune configurazioni con petali che consentano di mantenere al centro l'immagine di Mozart, come quella rappresentata in figura 9.

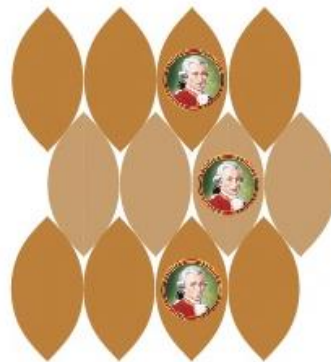


Figura 9: suddivisione di un foglio per incartare tre palline di Mozart in modo ottimale

fonte:

http://www.qedcat.com/archive_cleaned/188.html

È chiaro che, se non interessa inserire l'immagine di Mozart, esistono altri possibili rivestimenti che permettano di ricoprire con superfici piane una sfera con sempre maggior precisione. In ogni caso nessuna avrà un'area esattamente uguale a quella della superficie sferica, anche se metodi computazionali consentano di essere sempre più precisi.

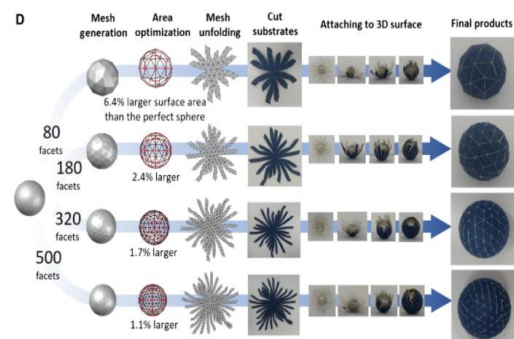


Figura 10: studi computazionali per ricoprire una sfera con una superficie piana

Fonte

<https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.aax6212>

Chiusa questa parentesi, non prima di aver osservato che queste analisi possono essere estese agli studi sulla fattibilità di ricoprire con una superficie piana una qualsiasi superficie curva, e non solo una sfera, torniamo al problema di stabilire se esistano o meno più di tre dimensioni e come possiamo immaginare le figure di uno spazio con una dimensione maggiore della nostra.

Uno tra i matematici che si sono occupati della questione, famoso anche al grande pubblico grazie al film di successo *A Beautiful Mind*, a lui ispirato, è stato John Nash. Nato nel 1928 nella West Virginia, ricevette il premio Nobel per l'economia nel 1994 e il suo nome è ricordato in modo particolare per i suoi studi matematici in quell'ambito noto come *Teoria dei giochi*. Questa nacque da quella branca della matematica chiamata *Calcolo delle variazioni*, che analizza problemi di ottimizzazione. Ma mentre nel Calcolo delle variazioni esiste un solo elemento del quale si cerchi di individuare il massimo o il minimo in corrispondenza ad alcune condizioni di vincolo (ad esempio massimizzare l'area di una figura di perimetro assegnato), nella Teoria dei giochi lo studio è condotto tenendo conto del comportamento di un certo numero di enti o individui in relazione tra loro. Qui non è detto che la scelta migliore sia quella di massimizzare il proprio risultato, le soluzioni dei problemi sono strategie che devono tener conto delle "mosse" degli avversari.



Figura 11: John Nash nella realtà e nella produzione cinematografica

Fonte:

https://didattica.sns.it/pluginfile.php/27074/mod_resource/content/1/Prof.%20Ambrosio.pdf

Nash introdusse un nuovo concetto di equilibrio, successivamente chiamato con il suo nome, *equilibrio di Nash*, che consiste in un insieme di strategie in cui nessun giocatore ha interesse a cambiare il proprio gioco, a meno che non lo cambi anche qualcun altro (un tipico esempio è il problema noto come *dilemma del prigioniero*).

La "bella mente" non si esaurì nella Teoria dei giochi, ma spaziò in numerosi altri settori della matematica, dalla logica alla geometria differenziale, dalla geometria algebrica alla topologia, tanto per citarne alcuni. Nash morì in un incidente stradale nel 2015, pochi giorni dopo aver ricevuto il prestigioso Premio Abel, che per la matematica costituisce l'equivalente del Premio Nobel che non è assegnato per questa disciplina, "per i notevoli contributi alla teoria delle equazioni alle derivate parziali non lineari e le loro applicazioni all'analisi geometrica". "I risultati ottenuti, lungi dall'essere confinati alla soluzione dei problemi per cui sono stati concepiti, si sono rivelati strumenti utilissimi e hanno trovato formidabili applicazioni in ulteriori contesti". Tra questi gli studi sulle regolarità delle funzioni di minima energia in numerosi fenomeni fisici.



Figura 12: John Nash riceve il Premio Abel, Oslo 2015

Tra i suoi contributi in ambito geometrico c'è stato un teorema che riguarda la possibilità di trasformare una superficie piana in una solida, o,

più in generale, di passare da una forma in un determinato spazio ad una in uno spazio con più dimensioni, mantenendo alcune importanti caratteristiche. È di questo che tratta il *teorema dell'immersione di Nash*: stabilisce le condizioni secondo le quali un ente geometrico con n dimensioni, ovvero ciò che in matematica si chiama *varietà n -dimensionale*, può essere incorporato in uno spazio con più dimensioni. Il problema, ma non la sua soluzione, era già noto alla fine del XIX secolo, allorché uno dei matematici più importanti della storia, Bernhard Riemann, rivoluzionò l'approccio alla geometria, spingendola verso un universo sconosciuto allo spazio della geometria euclidea. Il risultato a cui pervenne Nash nel 1954, in termini tecnici, stabilisce che *ogni varietà compatta di dimensione n e di classe C^k , con $k \geq 3$, può essere immersa isometricamente in $\mathbb{R}^N$, dove $N = \frac{n(3n+11)}{2}$* , fatto che, detto in termini meno matematici, implica che ogni varietà sufficientemente regolare può essere immersa in uno spazio euclideo di dimensioni maggiori e in esso mantenere le lunghezze delle curve. Se $n=2$, quindi se abbiamo una superficie bidimensionale, il teorema di Nash ci permette di considerarla in uno spazio con $N=17$ dimensioni. In questo spazio le distanze relative dei punti restano le stesse, così come le ampiezze degli angoli. Il risultato di Nash fu in seguito migliorato e le dimensioni necessarie per garantire l'isometria sono scese a 5.

In definitiva la matematica ci permette di trattare enti geometrici con dimensioni maggiori di quelle che le nostre menti sono in grado di visualizzare. Il teorema di immersione di Nash permette di mostrare che una superficie sferica può essere ridotta fino a dimensioni infinitesime increspando la superficie in modo che ogni curva sulla sfera iniziale mantenga la stessa lunghezza sulla superficie contratta.

Vediamo di calare meglio nella realtà questi ragionamenti. Prendiamo come esempio lo schermo del computer e immaginiamo di giocare a un video game. I personaggi che escono dal lato

sinistro rientrano da destra e viceversa, cioè si comportano non come se lo schermo fosse piatto, ma come se fosse cilindrico, ottenuto incollando il lato destro col sinistro. La stessa cosa succede con l'alto e il basso, se un personaggio esce dall'alto rientra dal basso, come se seguisse un percorso ininterrotto tra la parte superiore e la inferiore, anche in questo caso come se si muovesse su un cilindro, perpendicolare al precedente.

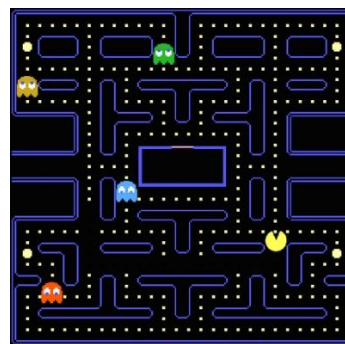


Figura 13: il famoso gioco per computer Pac-Man inventato nel 1980

Quindi per gli esserini fantastici che si muovono nei giochi digitali, tipico ad esempio è il Pac-Man, lo spazio non è quello che noi vediamo, un rettangolo piatto, ma una “ciambella”. Se prendiamo un quadrato e prima incolliamo due lati opposti e poi gli altri due, otteniamo la figura topologica (la *topologia* studia le deformazioni di figure che avvengono senza lacerazioni) che si chiama *toro*. Durante questo procedimento, le linee sulla superficie piatta si trasformano in linee di lunghezza diversa sul toro. Addirittura linee di lunghezza uguale nel quadrato iniziale diventano linee con misure differenti, perché il processo comporta una deformazione. Il toro è una rappresentazione dello spazio virtuale popolato dai personaggi dei video games.

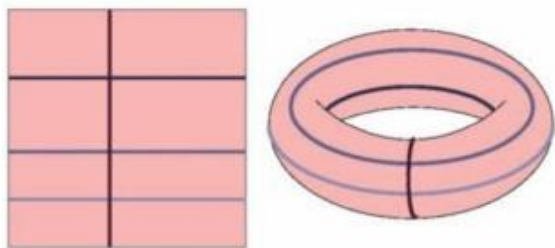


Figura 14: le linee non mantengono la lunghezza durante la trasformazione

Orbene, l'importante problema risolto da Nash fu quello di stabilire le condizioni affinché una superficie piatta potesse essere trasformata in una tridimensionale in modo isometrico, cioè mantenendo la distanza tra i punti e la lunghezza delle curve. Nonostante sia quasi impossibile immaginare che siano realizzabili trasformazioni di questo tipo, Nash dimostrò che esistono, anzi che queste immersioni sono possibili non solo con superfici bidimensionali, ma anche con enti di dimensioni superiori. La visualizzazione è pressoché impossibile senza l'uso di un computer, perché le trasformazioni che mantengono la lunghezza delle curve producono strutture che paradossalmente sono estremamente corrugate e contemporaneamente, localmente, estremamente lisce. Sono enti geometrici che sono stati rappresentati per la prima volta nel 2012 e che possiamo chiamare frattali lisci, perché come i frattali hanno una struttura che si ripete in modo identico in dimensioni sempre più piccole, ma che, se immaginiamo di ingrandirne una porzione infinitesima, in quell'intorno appaiono piatti come una superficie bidimensionale. Si può averne un'idea con le immagini 15 e 16, tratte dal filmato caricato su youtube all'indirizzo https://www.youtube.com/watch?v=RYH_KXhF1SY&ab_channel=HEVEAproject, realizzato dal gruppo del progetto francese Hevea (<http://hevea-project.fr/>), guidato dal matematico Vincent Borrelli dell'Università di Lione e dal sito del progetto.



Figura 15: il toro si deforma con una serie infinita di corrugamenti che hanno come effetto quello di modificare progressivamente la lunghezza delle curve fino a riportarle alla lunghezza iniziale

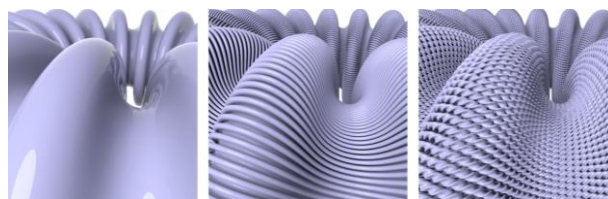


Figura 16: formazione di increspature

Le ondulazioni si accumulano sempre più, diminuendo l'ampiezza di oscillazione e aumentando la frequenza. Danno così luogo a un ente geometrico nuovo, che si colloca tra le superfici lisce e i frattali.

A questo punto viene naturale chiederci se questo tipo di procedimento iterativo possa essere applicato anche a una superficie sferica e anche in questo caso la risposta è affermativa. È possibile ridurre una sfera a un granello di sabbia con un algoritmo che passo dopo passo mantenga la lunghezza delle curve sulla superficie.

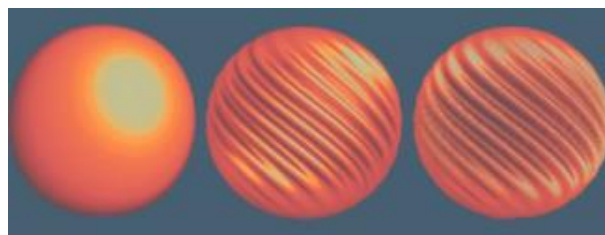


Figura 17: i corrugamenti sulla sfera

Fonte: www.lescienze.it

Solo fino a pochi anni fa sembrava impossibile rimpicciolire una sfera senza provocarne ammaccature, ma una volta aperta teoricamente la strada da Nash, gli studi sui frattali di Mandelbrot e

gli approfondimenti del matematico russo Mikhail Gromov hanno guidato Borrelli e la sua equipe nella stesura dell'algoritmo che ha permesso di ridurre anche una sfera, così come già fatto per il toro piatto, in modo illimitato.

L'idea derivante dai frattali è quella di seguire il procedimento necessario per rappresentare la forma geometrica nota come Curva di Koch. Si tratta di iniziare con un triangolo equilatero, suddividere ciascun lato in tre parti uguali e sostituire il segmento centrale con altri due segmenti isometrici, inclinati di 60° , per dare luogo alla stella del Passo 1 in figura 18. Si ripete lo stesso procedimento su ciascuno dei segmenti che si sono formati, cioè si divide ciascuno di essi in tre parti uguali e si sostituisce quello centrale con altri due segmenti con la stessa lunghezza, inclinati sul segmento di 60° e così via... all'infinito.

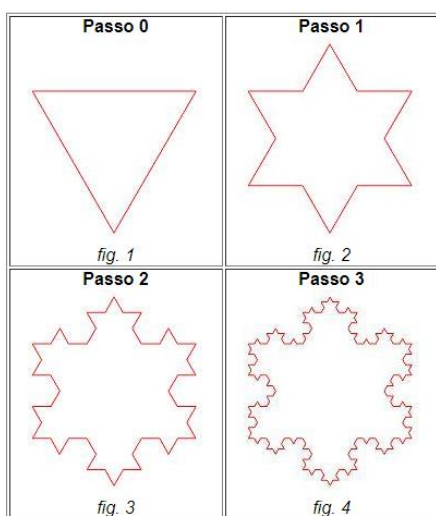


Figura 18: schema per realizzare il frattale noto con il nome di Curva di Koch Fonte: <http://www.frattali.it/fioccokoch.htm>

È chiaro che questo metodo iterativo può essere ripetuto indefinitamente e che la curva che si ottiene, pur essendo contenuta in una regione limitata, è sempre più frastagliata; è un frattale, un ente geometrico intermedio tra una linea e una superficie.

In modo analogo alla costruzione della Curva di Koch, si realizzano le increspature sulla superficie della sfera che permettono di “accartocciarla” con continuità, fino a ridurla a una dimensione infinitesima, ma sulla cui superficie le curve mantengono le dimensioni iniziali.

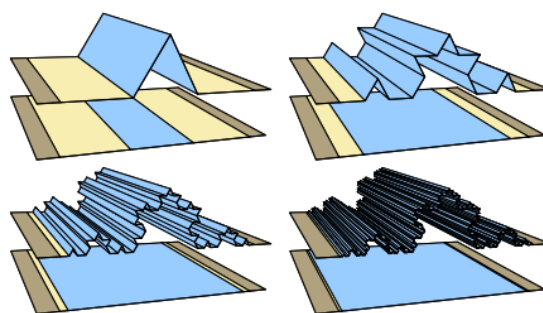


Figura 19: schema che segue il processo di formazione della curva di Koch per realizzare i corrugamenti sulla sfera

Fonte: <http://hevea-project.fr/pdfSphere/focm-revised-2.pdf>

Le tecniche computazionali aiutano l'uomo a comprendere e rendere visibile quello che menti geniali hanno immaginato e ipotizzato e che gli occhi da soli non permettono di distinguere.

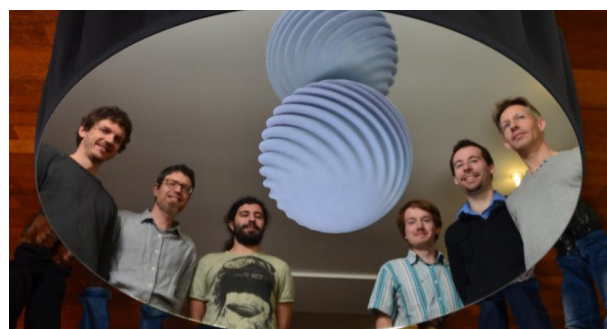


Figura 20: i ricercatori del progetto Hevea
Fonte: http://hevea-project.fr/imgPageSphere/Equipe_Hevea_2015.jpg

Le porte della percezione si sono aperte a nuovi scenari scientifici. Il poeta inglese William Blake aveva ragione: l'umanità può superare i limiti a lei posti dai cinque sensi.

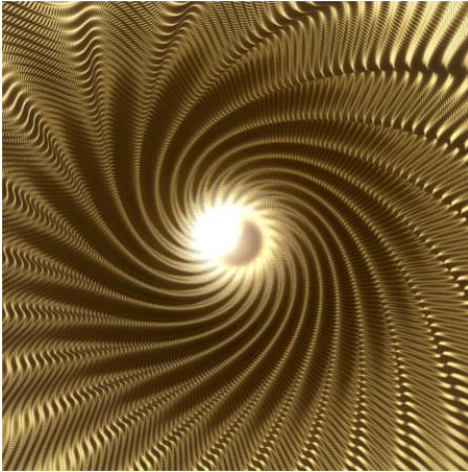


Figura 21: interno di una sfera ridotta

Fonte: <http://hevea-project.fr/ENPageSphereDossierDePresse.html>

Sono stati consultati:

- [1] <http://rassegna.be.unipi.it/20150525/SI81040.pdf>
- [2] http://www.ergazzori.it/files/edwin_a_abbott_-_flatlandia.pdf
- [3] <http://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-toro-plano.html?lang=fr>
- [4] <http://hevea-project.fr/ENPageSphereDossierDePresse.html>
- [5] <http://hevea-project.fr/pdfSphere/focm-revised-2.pdf>

- [6] <https://poisson.phc.dm.unipi.it/~barbarino/did/TdG/TdG.pdf>
- [7] https://www.qedcat.com/archive_cleaned/188.html
- [8] <https://www.science.org/doi/10.1126/sciadv.aax6212>
- [9] https://didattica.sns.it/pluginfile.php/27074/mod_resource/content/1/Prof.%20Ambrosio.pdf
- [10] http://erikdemaine.org/papers/SphereWrapping_CGTA/paper.pdf
- [11] <https://www.pourlascience.fr/sd/mathematiques/sphere-reduite-mais-distances-inchangees-12659.php>

